УДК 539.374.1, 539.381, 539.4.012

Иванов К. М.
Винник П. М.

ДОПУСТИМЫЕ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ ОТ ДЕФОРМАЦИЙ В ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССАХ

С целью установить возможные условия наличия простой зависимости интенсивности напряжений от степени деформации Ильюшин А. А. ввел понятие простого нагружения как нагружения, при котором внешние силы от начала их приложения возрастают пропорционально общему параметру [1]. При этом угол вида напряженного состояния, коэффициент Надаи-Лоде ν_σ и положение главных осей тензора T_σ не меняются в процессе нагружения. Все остальные нагружения являются сложными.

Смирнов-Аляев Г. А. [2] ввел понятие монотонной деформации, условиями которой являются: 1) совпадение главных осей скорости деформации с одними и теми же материальными волокнами; 2) неизменность за весь процесс деформации величины $\nu = \nu_{\dot{\varepsilon}} = \dfrac{2\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}$. Смирнов-Аляев Г. А. указывает, что первое условие монотонности означает, что тензоры T_ε, $T_{\dot{\varepsilon}}$ коаксиальны: $T_\varepsilon \uparrow\uparrow T_{\dot{\varepsilon}}$. При монотонной деформации, в отличие от простого нагружения, допускается поворот главных осей тензора T_σ.

Понятие монотонности деформации оказалось полезным при изучении процессов обработки металлов давлением, поэтому классификация процессов как монотонных и немонотонных широко используется в работах различных авторов [3, 4].

Теории пластичности существенно основываются на соотношениях между тензорами $T_\varepsilon, T_{\dot{\varepsilon}}, T_\sigma$. Так, теория малых упругопластических деформаций устанавливает совпадение по направлению и индексу главных осей напряженного состояния с главными осями деформации $T_\varepsilon \uparrow\uparrow T_\sigma$, а также равенство $\nu_\varepsilon = \nu_\sigma$. В свою очередь, теория пластического течения устанавливает совпадение по направлению и индексу главных осей напряженного состояния с главными осями скоростей деформации $T_{\dot{\varepsilon}} \uparrow\uparrow T_\sigma$, а также равенство $\nu_{\dot{\varepsilon}} = \nu_\sigma$.

Таким образом, выполнение первого условия монотонности деформации означает (вне зависимости от принятия положений теории малых упругопластических деформаций или теории пластического течения) сонаправленность всех трех тензоров: $T_\varepsilon \uparrow\uparrow T_{\dot{\varepsilon}} \uparrow\uparrow T_\sigma$.

В дальнейшем Чикидовским В. П. и Смирновым-Аляевым Г. А. было введено понятие односдвигового процесса [2], как процесса, при котором выполняется второе условие монотонности, а первое условие, вообще говоря, не выполняется, а Ивановым К. М. было введено понятие однонаправленного процесса, как процесса, при котором выполняется первое условие монотонности, а второе, вообще говоря, не выполняется.

В работах [5, 6] разработана классификация процессов сложного нагружения, опирающаяся на вышеописанные понятия, причем односдвиговые и однонаправленные процессы рассматриваются как частично немонотонные.

При необходимости аналитически учесть наличие физической монотонности процесса возникают определенные трудности, так как для проверки условий монотонности необходимо вычислить главные компоненты и главные направления тензоров деформаций и скоростей деформаций. В случае, когда компоненты тензоров сами являются неизвестными функциями от времени, нахождение в общем виде собственных чисел и векторов, хотя и возможно, но неприемлемо из-за существенной громоздкости выражений для них. В [7] получено необходимое и достаточное условие однонаправленности процесса, которое для своей проверки не требует вычисления главных компонентов и направлений и оперирует непосредственно с элементами тензоров.

Для дальнейших исследований представляют интерес следующие два вопроса.

1) При любом ли деформированном состоянии в фиксированной точке возможно дальнейшее деформирование с выполнением первого условия монотонности?

2) Если такое дальнейшее деформирование возможно, то каким оно должно (может) быть?

Так как первое условие монотонности задаёт совместные ограничения на тензоры деформаций и скоростей деформаций, то описание однонаправленных процессов означает нахождение всех возможных зависимостей компонентов тензора скоростей деформаций от компонентов тензора деформаций.

Целью работы является описание однонаправленных процессов нагружения (процессов, для которых выполнено первое условие Смирнова-Аляева Г. А. монотонности деформаций) путем установления таких зависимостей тензора скоростей деформаций от тензора деформаций, которые обеспечивают однонаправленность процесса.

При предположении о простоте спектров тензоров T_ε, $T_{\dot\varepsilon}$ в [7] получены необходимые и достаточные условия выполнения первого условия монотонности, состоящие в одновременном выполнении как условия Ишлинского А. Ю. соосности тензоров, так и некоторой системы неравенств для компонентов тензоров T_ε, $T_{\dot\varepsilon}$. Эти условия не требуют для своей проверки вычисления главных компонентов и главных направлений [3], а оперируют непосредственно с компонентами тензоров.

В частности, для тензоров A и B приведенных к главным осям, требуется выполнение системы неравенств:

$$\begin{cases} \Omega_1 = (a_{11}-a_{22})(b_{11}-b_{22}) + (a_{22}-a_{33})(b_{22}-b_{33}) + (a_{11}-a_{33})(b_{11}-b_{33}) > 0, \\ \Omega_3 = (a_{11}-a_{22})(b_{11}-b_{22})(a_{22}-a_{33})(b_{22}-b_{33})(a_{11}-a_{33})(b_{11}-b_{33}) > 0, \\ \Omega_1 \cdot \big((a_{11}-a_{22})(b_{11}-b_{22})(a_{22}-a_{33})(b_{22}-b_{33}) + \\ \quad + (a_{11}-a_{22})(b_{11}-b_{22})(a_{11}-a_{33})(b_{11}-b_{33}) + \\ \quad (a_{22}-a_{33})(b_{22}-b_{33})(a_{11}-a_{33})(b_{11}-b_{33}) \ \big) - \Omega_3 > 0. \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, b_{11}, b_{22}, b_{33}$ – главные компоненты тензоров A и B.

Условия Ишлинского А. Ю. соосности тензоров являются условиями перестановочности тензоров: $T_{\dot\varepsilon}T_\varepsilon = T_\varepsilon T_{\dot\varepsilon}$.

В [4] указывается, что все матрицы, перестановочные с произвольной матрицей A n-го порядка, имеющей простой спектр, представляются в виде многочлена $(n-1)$-го порядка от матрицы A.

Таким образом, можно считать, что

$$T_{\dot\varepsilon} = c_0 E + c_1 T_\varepsilon + c_2 T_\varepsilon^2, \tag{2}$$

где c_0, c_1, c_2 – произвольные функции, зависящие от x, y, z, t. Имея это, сравнительно явное, представление тензора $T_{\dot\varepsilon}$ можно попробовать более явно проверить, при каких значениях неизвестных функций c_0, c_1, c_2 выполняются все условия – неравенства указанной системы (1) из [3].

Итак, будем считать, что тензор деформаций в данной точке приведен к главным осям (тогда из (2) следует, что тензор скоростей деформаций тоже приведен к главным осям).

Подставляя (2) в систему (1), деля обе части неравенств на положительные (при простоте спектра T_ε) коэффициенты при c_1, и вводя обозначения:

$$W_0 = \frac{(a_{11}+a_{22})(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{11}+a_{33})(a_{11}-a_{33})^2 + (a_{22}+a_{33})(a_{22}-a_{33})^2}{(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{11}-a_{33})^2 + (a_{22}-a_{33})^2},$$

$$W_1 = \frac{(a_{11}+a_{22})(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{11}+a_{33})(a_{11}-a_{33})^2}{(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{11}-a_{33})^2},$$

$$W_2 = \frac{(a_{11}+a_{22})(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{22}+a_{33})(a_{22}-a_{33})^2}{(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{22}-a_{33})^2},$$

$$W_3 = \frac{(a_{11}+a_{33})(a_{11}-a_{33})^2 + (a_{22}+a_{33})(a_{22}-a_{33})^2}{(a_{11}-a_{33})^2 + (a_{22}-a_{33})^2},$$

где a_{11}, a_{22}, a_{33} – главные компоненты тензора T_ε, получаем из (1):

$$\begin{cases} c_1 + W_0 c_2 > 0, \\ (c_1 + (a_{11}+a_{22})c_2)(c_1 + (a_{11}+a_{33})c_2)(c_1 + (a_{22}+a_{33})c_2) > 0, \\ (c_1 + W_1 c_2)(c_1 + W_2 c_2)(c_1 + W_3 c_2) > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Форма и размеры множества решений системы неравенств (3) определяются взаимным расположением чисел $(a_{11}+a_{22})$, $(a_{11}+a_{33})$, $(a_{22}+a_{33})$, W_0, W_1, W_2, W_3 на числовой прямой. Не умаляя общности, можем считать, что $a_{11} > a_{22} > a_{33}$. Полагаем тогда $\varepsilon = a_{11} - a_{22}$, $\delta = a_{22} - a_{33}$ ($\varepsilon > 0$, $\delta > 0$).

Имеют место следующие пять случаев (с целью выделить различия между ними, коэффициенты W_2 и W_0 подчеркнуты).

1) При $\delta < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\varepsilon$

$$(a_{22}+a_{33}) < W_3 < (a_{11}+a_{33}) < \underline{W_0} < W_1 < \underline{W_2} < (a_{11}+a_{22})$$

(при $\delta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\varepsilon$ неравенство $W_1 < W_2$ превращается в равенство).

2) При $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\varepsilon < \delta < \varepsilon$

$$(a_{22}+a_{33}) < W_3 < (a_{11}+a_{33}) < \underline{W_0} < \underline{W_2} < W_1 < (a_{11}+a_{22}).$$

3) При $\delta = \varepsilon$

$$(a_{22}+a_{33}) < W_3 < (a_{11}+a_{33}) = \underline{W_0} = \underline{W_2} < W_1 < (a_{11}+a_{22}).$$

4) При $\varepsilon < \delta < \frac{\sqrt{5}+1}{2}\varepsilon$

$$(a_{22}+a_{33}) < W_3 < \underline{W_2} < \underline{W_0} < (a_{11}+a_{33}) < W_1 < (a_{11}+a_{22})$$

(при $\delta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\varepsilon$ неравенство $W_3 < W_2$ превращается в равенство).

5) При $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\varepsilon < \delta$

$$(a_{22}+a_{33}) < \underline{W_2} < W_3 < \underline{W_0} < (a_{11}+a_{33}) < W_1 < (a_{11}+a_{22}).$$

Заметим, что случаи 1–2 соответствуют неравенству $\nu_\varepsilon < 0$, случай 3 – равенству $\nu_\varepsilon = 0$, случаи 4–5 – неравенству $\nu_\varepsilon > 0$.

При произвольных значениях $a_{11} > a_{22} > a_{33}$ множество решений первого неравенства образует открытую полуплоскость в плоскости $(c_2; c_1)$, содержащую положительную полуось оси c_1 (так как при подстановке $c_2 = 0$ в первое неравенство, оно превращается в неравенство $c_1 > 0$).

Графики линейных функций, расположенных в скобках левой части второго (третьего) неравенства, разбивают плоскость $(c_2; c_1)$ на 6 углов (для третьего неравенства – при дополнительном условии, что значение δ не равно ни $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\varepsilon$, ни ε, ни $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\varepsilon$) с общей вершиной в начале координат. Если последовательно пронумеровать эти углы, начиная с присвоения номера 1 углу, содержащему положительную полуось оси c_1, то множество решений второго (третьего) неравенства – объединение внутренностей трех углов из шести – углов 1,3,5.

Для вышеприведенного случая 1 типичные множества решений отдельных неравенств и всей системы (3) приведены на рис. 1 (конкретное расположение прямых определяется конкретными значениями величин a_{11}, a_{22}, a_{33}, но порядок прямых в рамках случая 1 сохраняется).

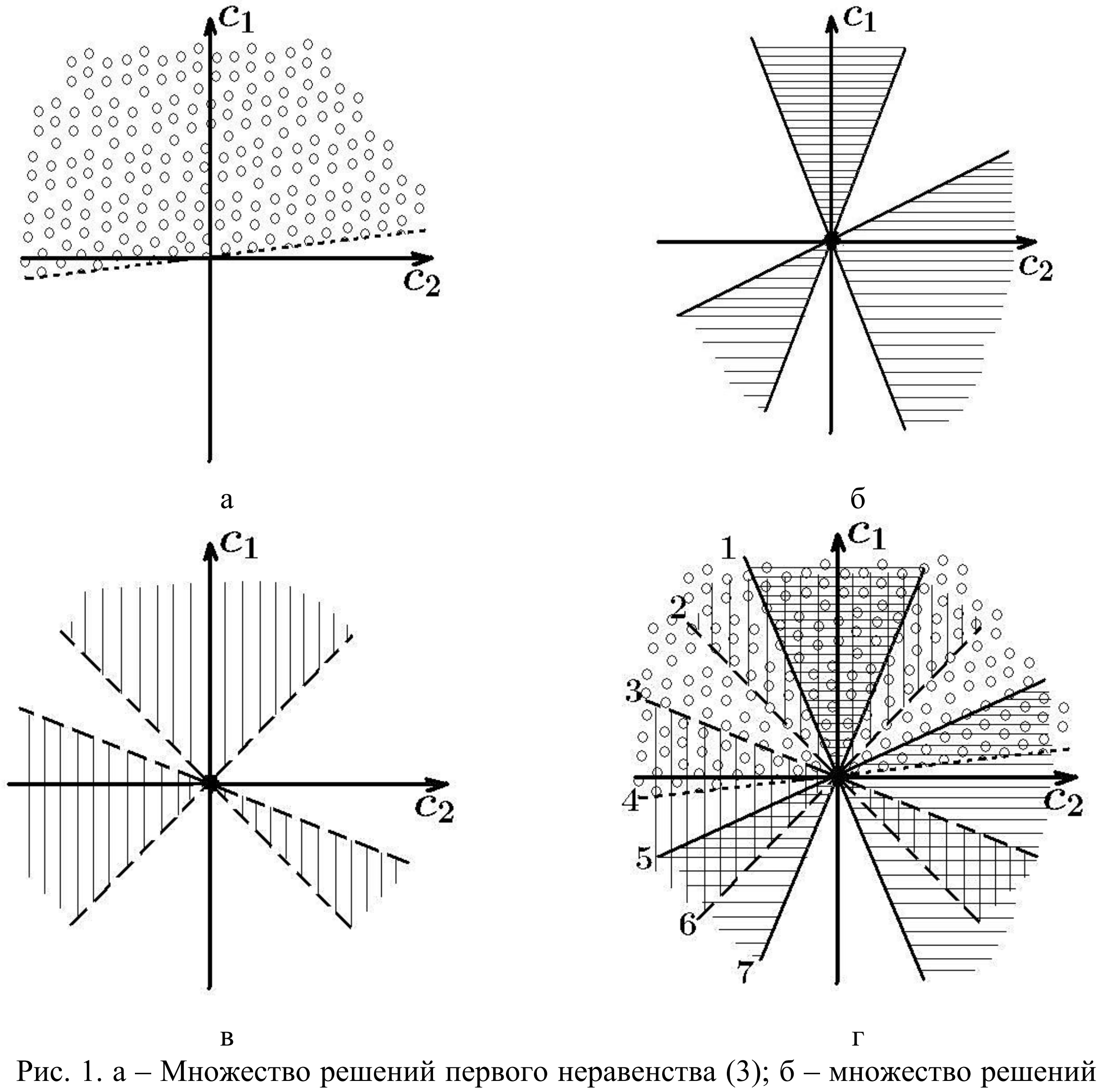

Рис. 1. а – Множество решений первого неравенства (3); б – множество решений второго неравенства (3); в – множество решений третьего неравенства (3); г – Множество решений системы неравенств (3); 1 – прямая $c_1 = -(a_{11} + a_{22})c_2$; 2 – прямая $c_1 = -W_2 c_2$; 3 – прямая $c_1 = -W_1 c_2$; 4 – прямая $c_1 = -W_0 c_2$; 5 – прямая $c_1 = -(a_{11} + a_{33})c_2$; 6 – прямая $c_1 = -W_3 c_2$; 7 – прямая $c_1 = -(a_{22} + a_{33})c_2$.

Из рис. 1 следует, что для случая 1 множество решений системы – это открытый угол в полуплоскости $c_1 > 0$ между прямыми $c_1 = -(a_{11} + a_{22})c_2$ и $c_1 = -(a_{22} + a_{33})c_2$, содержащий положительную полуось оси c_1. Подчеркнем, что этот угол образован прямыми (помеченными номерами 1 и 7 на рис. 1) с наименьшим и наибольшим угловыми коэффициентами из коэффициентов всех семи прямых.

Заметим, что в случаях 2–5 изменяется взаимное расположение остальных прямых (прямых, помеченных номерами 2–6 на рис. 1), а прямые с наибольшим и наименьшим угловыми коэффициентами остаются теми же.

Отсюда следует, что множество решений системы неравенств во всех случаях 1–5 имеет один и тот же вид – это указанный открытый угол между прямыми $c_1 = -(a_{11} + a_{22})c_2$ и $c_1 = -(a_{22} + a_{33})c_2$, содержащий положительную полуось оси c_1 в верхней полуплоскости.

Конечно, порядок прямых в случаях 2–5 будет другой, то есть рис. 1 соответствует только случаю 1.

Таким образом, в данной точке (x, y, z) будет выполнено первое условие монотонности деформации, если в ней тензор скоростей деформаций имеет вид $T_{\dot{\varepsilon}} = c_0 E + c_1 T_\varepsilon + c_2 T_\varepsilon^2$, где $T_\varepsilon = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, c_0, c_1, c_2 – произвольные функции, зависящие от x, y, z, t, причем c_1, c_2 удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} c_1 > (a_{11} + a_{22})c_2, \\ c_1 > (a_{22} + a_{33})c_2. \end{cases}$

ВЫВОДЫ

1. Получено полное описание однонаправленных процессов, то есть процессов, для которых выполнено первое условие Смирнова-Аляева Г. А. монотонности деформаций.

2. Установлено, что при любом исходном деформированном состоянии в фиксированной точке возможно дальнейшее деформирование с выполнением первого условия монотонности.

3. Установлено, что выполнение для процесса первого условия монотонности равносильно специальному характеру зависимости тензора скоростей деформаций от тензора деформаций:

$$T_{\dot{\varepsilon}} = c_0 E + c_1 T_\varepsilon + c_2 T_\varepsilon^2,$$

где T_ε приведен к главным осям, c_0, c_1, c_2 – произвольные функции, зависящие от x, y, z, t, причем c_1, c_2 удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} c_1 > (a_{11} + a_{22})c_2, \\ c_1 > (a_{22} + a_{33})c_2, \end{cases}$

где $a_{11} > a_{22} > a_{33}$ – главные компоненты тензора T_ε.

4. В отличие от работы [7], в которой однонаправленные процессы характеризовались 12 скалярными параметрами, связанными тремя равенствами и тремя неравенствами, получено описание однонаправленных процессов при помощи 9 скалярных параметров, связанных двумя неравенствами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Часть 1. / А. А. Ильюшин. – М-Л. ГИТТЛ. 1948. – 376 с.

2. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. / Г. А. Смирнов-Аляев. – Л. : Машиностроение. 1978. – 368 с.

3. Численное математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния металла при горячей прокатке относительно тонких лент и полос. / А. В. Сатонин, С. С. Настоящая, М. Г. Коренко, В. А. Переходченко //. Обработка материалов давлением: сб. научн. трудов. – Краматорск : ДГМА, 2010. – № 4 (25). – С. 31–36.

4. Сивак Р. И., Влияние немонотонности пластической деформации на напряжённое состояние. / Р. И. Сивак, О. В. Сердюк, И. О. Сивак // Обработка материалов давлением: сб. научн. трудов. – Краматорск : ДГМА, 2010. – № 2 (23). – с. 3–7.

5. Иванов К. М. Реологическая модель односдвиговых процессов деформирования / К. М. Иванов, П. М. Винник, Э. И. Ульянов. // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского Государственного Политехнического Университета. СПб. : – 2008. – № 4 (63). – С. 86–90.

6. Механические свойства материалов при сложном нагружении. / К. М. Иванов, А. А. Митюшов, Э. И. Ульянов, Д. В. Усманов, П. М. Винник. СПб. Издательство БГТУ, 2011. – 150 с.

7. Иванов К. М. Механические свойства материалов при сложном нагружении. / К. М. Иванов, П. М. Винник, В. Н. Иванов // Вестник Московского Авиационного Института. – М. : Изд-во МАИ, 2012. – Т19, № 5. – С.172–181.

8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. / Ф. Р. Гантмахер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 с.

REFERENCES

1. Il'iushin A. A. Plastichnost'. Chast' 1 (Plasticity. Part1). / A. A. Il'iushin. – M.-L. GITTL, 1948. – 376 s.

2. Smirnov-Aliaev G. A. Soprotivlenie materialov plasticheskomu deformirovaniiu. / G. A. Smirnov-Aliaev – L. : Mashinostroenie, 1978. – 368 s.

3. Chislennoe matematichesloe modelirovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia metalla pri goriachei prokatke otnositel'no tonkikh lent I polos (Numeral mathematical modeling of the deflected mode of metal at the hot rolling in relation to thin strips and bars) / A. V. Satonin, S. S. Nastoyashcaya, M. G. Korenko, V. G. Perehodchenko // Obrabotka materialov davleniem (Materials working by pressure) : sb. nauchn. trudov. – Kramatorsk : DGMA, 2010. – № 4 (25). – S. 31–36.

4. Sivak R. I.Vliianie nemonotonnosti plasticheskoi na napriagennoe sostoianie (Influence of non-monotonic plastic deformation on the stressed state) / R. I. Sivak, O. V. Serdyuk, J. O. Sivak. // Obrabotka materialov davleniem. (Materials working by pressure) : sb. nauchn. trudov. – Kramatorsk : DGMA, 2010. – № 2 (23). – S. 3–7.

5. Ivanov K. M. Reologicheskaia model' odnosdvigovykh protsessov deformirovaniia. / K. M. Ivanov, P. M. Vinnik, Ė. I. Ul'ianov.// Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo Gosudarstvennogo Politekhnicheskogo Universiteta. SPb. : – 2008. – № 4 (63). – S. 86–90.

6. Mekhanicheskie svoĭstva materialov pri slozhnom nagruzhenii. / K. M. Ivanov, A. A. Mitiushov, Ė. I. Ul'ianov, D. V. Usmanov, P. M. Vinnik. SPb: – 2011. – 150 s.

7. Ivanov K. M. Mekhanicheskie svoĭstva materialov pri slozhnom nagruzhenii // Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta. / K. M. Ivanov, P. M. Vinnik, V. N. Ivanov. – M.: – 2012. – T19, № 5. – S. 172–181.

8. Gantmakher F. R. Teoriia matrits (Theory of matrices). / F. R. Gantmakher. M. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 560 s.

Иванов К. М. – д-р техн. наук, проф. БГТУ
Винник П. М. – канд. физ.-мат. наук, доцент БГТУ

БГТУ – Балтийский Государственный Технический Университет «Военмех» им. Д. Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург, Россия.

E-mail: vinnik.pm@gmail.com

Статья поступила в редакцию 26.02.2014 г.